ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
2025 -2026
www.ereuna.com.gr

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Α2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α3. Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

τότε υποχρεωτικά η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$

Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση ως Αληθής ή Ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

ΜΟΝΑΔΕΣ 1+2

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο Δ τότε $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

β) Μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$

δ) Αν f συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ τότε $f(0)\neq f(1)$

ε) Κάθε τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο μίας συνάρτησής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ με $x\neq -1$, $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ με $x\neq -1$ και $h(x)=x^2$ με $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β2. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $\varphi(x) = ((f-g)\circ h)(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Αν $\varphi(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

Β3. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_2^3 \frac{1}{\varphi(x)(x^2+1)}dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $(x-1)f(x) \le x-2+\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$
- $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Αν $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ με $x>0$

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $e^{\lambda x}-x=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(1-\alpha x)\cdot\ln x+\beta$ με $x>0$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Δ1. Αν η g παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathrm{A}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$ και στη συνέχεια να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Για $\alpha=1$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>1$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,\alpha^2)$, ώστε:

$$\int_1^{\alpha^2} g'(x)\,dx=g'(\xi)\cdot\int_1^{\alpha}2x\,dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ4. Αν G μια αρχική της g, με $G(1)=0$ και $\rho_1,\ \rho_2$, με $\rho_1<\rho_2$, οι ρίζες του ερωτήματος **Δ2**, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\rho_1 G(x)=\rho_1+\rho_2-2x$$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(\rho_1,\ \rho_2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ