ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Λ/Σ/Λ/ΣΙΛ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έχουμε $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ με $x \neq -1$ δηλαδή ορίζεται στο $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε διαδοχικά έχουμε

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1}$$

$$\cancel{x_1 x_2} + x_1 = \cancel{x_1 x_2} + x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται

Έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = y$

$$\Leftrightarrow x = xy + y$$

$$\Leftrightarrow x - xy = y$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \text{ με } 1-y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$$

Άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-y}$ με $y \neq 1$

οπότε $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$ με $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

B2.

Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x+1}$ με $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ με $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Άρα $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1-x}{x+1}$ με $x \neq -1$

Για το πεδίο ορισμού της $(f-g)\circ h$ θα πρέπει:

$\left.\begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 \neq -1 \end{array}\right\}$ άρα $x \in \mathbb{R}$ οπότε $[(f-g)\circ h](x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

↳ ισχύει

B3.

Η $\phi(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R}$ ως ρητή

έχουμε: $\phi'(x) = \frac{(1-x^2)' \cdot (x^2+1) - (1-x^2) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-2x(x^2+1) - 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{\cancel{-2x^3} - 2x - 2x \cancel{+2x^3}}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$

Έχουμε $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

$\phi'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}<0 \Leftrightarrow -4x<0 \Leftrightarrow x>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ϕ'	$+$	0	$-$
ϕ	$\nearrow$		$\searrow$

Όταν $x\in(-\infty,0]$ η $\phi(x)$ είναι γν. αύξουσα
Όταν $x\in[0,+\infty)$ η $\phi(x)$ είναι γν. φθίνουσα

Όταν $x=0$ η $\phi(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή $\phi(0)=1$

B4.
Έχουμε $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\phi(x)\cdot(x^2+1)}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{\frac{1-x^2}{x^2+1}\cdot(x^2+1)}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

Ισχύει ότι $1-x^2=(1-x)\cdot(1+x)$ επομένως υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x}+\frac{\beta}{1+x} \Leftrightarrow$$

$$1=\alpha(1+x)+\beta(1-x) \Leftrightarrow$$

$$1=\alpha+\alpha x+\beta-\beta x \Leftrightarrow$$

$$1=\alpha+\beta+(\alpha-\beta)x$$

Άρα $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=1\\ +\ \alpha-\beta=0\end{array}\right\}$

$2\alpha=1$

$\alpha=1/2$ και $\alpha=\beta \Leftrightarrow \beta=1/2$

Άρα $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1/2}{1-x}+\dfrac{1/2}{1+x}$

Οπότε $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_2^3\left(\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}\right)dx = \left[-1/2\ln|1-x|+1/2\ln|1+x|\right]_2^3$

$-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 3$

$-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 4+\ln 3$

$-\frac{1}{2}(\ln 2-2\ln 2+\ln 3)$

$-\frac{1}{2}\cdot(\ln 3-\ln 2)$

$-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε $(x-1)\cdot f(x) \le x-2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$(x-1)\cdot f(x) - x + 2 + \frac{1}{x} \le 0 \quad \text{για κάθε } x>0$$

Θεωρούμε $g(x) = (x-1)\cdot f(x) - x + 2 + \frac{1}{x}$ με $x \in (0,+\infty)$

τότε η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$g(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le g(1) \quad \text{για καθε } x>0$$

άρα η g για $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστο

το 1 είναι εσωτερικο σημείο του A

η g παραγωγίζεται στο 1 με $g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - 1 - \frac{1}{x^2}$

Αρα απο Θεώρημα Fermat έχουμε

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(1) + (1-1)f'(x) - 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 0$$

Γ2.

Έχουμε $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2} = 0$

$$g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow G(x) = \ln x$$

$$e^{G(x)} = e^{\ln x} = x$$

Πολλαπλασιάζουμε με x

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot x + f(x) - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x)\cdot x - \ln x)' = 0$$

Άρα $f(x)\cdot x - \ln x = c$ για καθε $x>0$

και επειδη $f(1)=0$ έχουμε

$$f(1)\cdot 1 - \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f(x)\cdot x = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $x>0$

Γ3.

Η f ορίζεται στο $A=(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό ως πράξεις συνεχών

και $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Είναι $f'(x)=0 \leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \leftrightarrow 1-\ln x=0 \leftrightarrow \ln x=1 \leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0 \leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \leftrightarrow 1-\ln x>0 \leftrightarrow \ln x<1 \leftrightarrow x<e$

$f'(x)<0 \leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}<0 \leftrightarrow 1-\ln x<0 \leftrightarrow \ln x>1 \leftrightarrow x>e$

x	0	e	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

• Η f στο $A_1=(0,e]$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα

άρα $f(A_1)=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ f(e)]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\cdot\ln x \overset{(+\infty)\cdot(-\infty)}{=\!=} -\infty$ και $f(e)=\dfrac{1}{e}$

Άρα $f(A_1)=(-\infty, 1/e]$

• Η f στο $A_2=(e,+\infty)$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα

άρα $f(A_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x))$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\ \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{e}$

Άρα $f(A_2)=(0, 1/e)$

Οπότε $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty, 1/e]\cup(0, 1/e)=(-\infty, 1/e]$

Γ4.

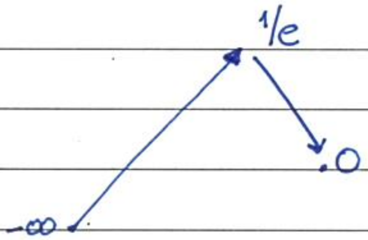
Έχουμε $e^{\lambda x} - x = 0 \leftrightarrow e^{\lambda x} = x$

$\leftrightarrow \lambda x = \ln x$

$\leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln x}{x}$

$\leftrightarrow f(x) = \lambda$

Όμως στο Γ3 βρίκαμε το σύνολο τιμων της f για το οποίο έχουμε



Όταν $\lambda < 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση
Όταν $0 \leq \lambda < 1/e$ η $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες
Όταν $\lambda = 1/e$ η $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα
Όταν $\lambda > 1/e$ η $f(x) = \lambda$ είναι Αδύνατη

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $g(1) = 1/2 \Leftrightarrow (1-a)\cdot \ln 1 + b = 1/2 \Leftrightarrow b = 1/2$

Επίσης $g'(1)=0$ με $g'(x) = (1-ax)'\cdot \ln x + (1-ax)\cdot(\ln x)'$

$$= -a\cdot \ln x + \frac{1-ax}{x}$$

οπότε $g'(1)=0 \Leftrightarrow -a\cdot \ln 1 + \frac{1-a}{1} = 0$

$$\Leftrightarrow 1-a=0$$

$$\Leftrightarrow a=1$$

Οπότε $g(x) = (1-x)\ln x + 1/2$ με $x>0$

Η g είναι συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ και συνεχής σε αυτό ως πράξεις συνεχών.

Έχουμε $g'(x) = (1-x)'\cdot \ln x + (1-x)\cdot(\ln x)' + (1/2)'$

$g'(x) = -\ln x + \frac{1-x}{x}$ → προφανής ρίζα το 1

$g'(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$

και $g''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$ άρα η g' (↘) και η προφανής ρίζα είναι μοναδική

• Με $x<1 \overset{g'}{\underset{\searrow}{\Leftrightarrow}} g'(x) > g'(1) \Leftrightarrow g'(x) > 0$

• Με $x>1 \overset{g'}{\underset{\searrow}{\Leftrightarrow}} g'(x) < g'(1) \Leftrightarrow g'(x) < 0$

x	0		1		$+\infty$
g'		+	0	−	
g		↗		↘	

Όταν $x\in(0,1]$ η g είναι γν. αύξουσα

Όταν $x\in[1,+\infty)$ η g είναι γν. φθίνουσα

Όταν $x=1$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή $g(1) = 1/2$

Δ2.

Η g στο $A_1=(0,1]$ είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα

άρα $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x),\ g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)\cdot \ln x + 1/2 \overset{(-\infty)+1/2}{=\!=\!=} -\infty$

$g(1)=1/2$

→ Οπότε $g(A_1)=(-\infty, 1/2]$ το $0\in g(A_1)$ άρα η $g(x)=0$ λόγω μονοτονίας έχει μία ρίζα στο $(0,1]$

Η g στο $A_2=(1,+\infty)$ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα

άρα $g(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to +\infty} g(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (1-x)\cdot \ln x + 1/2 \overset{(-\infty)\cdot(+\infty)+1/2}{=\!=\!=} -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1-x)\cdot \ln x + 1/2 = 1/2$

→ Οπότε $g(A_2)=(-\infty, 1/2)$ το $0\in g(A_2)$ άρα η $g(x)=0$ λόγω μονοτονίας έχει μία ρίζα στο $(1,+\infty)$

Άρα συνολικά δύο θετικές ρίζες.

Δ3.

Έχουμε $\displaystyle\int_1^{a^2} g'(x)\,dx = g'(\xi)\cdot \int_1^{a} 2x\,dx \Leftrightarrow$

$\left[g(x)\right]_1^{a^2} = g'(\xi)\cdot\left[x^2\right]_1^{a} \Leftrightarrow$

$g(a^2)-g(1) = g'(\xi)\cdot(a^2-1) \Leftrightarrow$ $a>1 \to a^2>1 \to a^2-1>0$

$\dfrac{g(a^2)-g(1)}{a^2-1} = g'(\xi)$

Η g στο $[1,a^2]$ είναι συνεχής

Η g στο $(1,a)$ είναι παραγωγίσιμη

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,a^2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(a^2)-g(1)}{a^2-1}$

Δ4.

Ζητάμε μια ρίζα της εξίσωσης $p_1 G(x) = p_1 + p_2 - 2x \Leftrightarrow$

$p_1 G(x) - p_1 - p_2 + 2x = 0$

Θεωρούμε $f(x) = p_1 G(x) - p_1 - p_2 + 2x$ με $x \in [p_1, p_2]$

Η f είναι συνεχής στο $[p_1, p_2]$ και

$f(p_1) = p_1 G(p_1) - p_1 - p_2 + 2p_1 = \underbrace{p_1 G(p_1) + p_1 - p_2}$

Θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της παράστασης

Έχουμε $p_1 > 0$ από β)

και $p_1 - p_2 < 0$ από υπόθεση

Για το $G(p_1)$ θα βρούμε το πρόσημο της $G(x)$ στο $[p_1, p_2]$

Έχουμε $G(1) = 0$ άρα ξέρουμε μια ρίζα

Θα βρούμε την μονοτονία της της $G(x)$.

$G'(x) = g(x) = (1-x)\cdot \ln x + 1/2$

x	0		p_1		1		p_2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Η g διατηρεί πρόσημο μεταξύ των ριζών p_1 και p_2 αφού είναι συνεχής και $g(1) = 1/2 > 0$ άρα η $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (p_1, p_2)$ συνεπώς $G'(x) > 0$ στο (p_1, p_2)

άρα η $G(x)$ είναι $(\uparrow)$ στο $[p_1, p_2]$

Οπότε με $x < 1 \overset{G}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} G(x) < G(1) \Leftrightarrow G(x) < 0$

και επειδή $p_1 < 1$ έχουμε $G(p_1) < 0$

Άρα $f(p_1) = \underbrace{p_1 G(p_1)}_{\ominus} + \underbrace{p_1 - p_2}_{\ominus} < 0$

$f(p_2) = p_2 G(p_2) - p_1 - p_2 + 2p_2 = p_2 G(p_2) + p_2 - p_1$

τωρα έχουμε

$p_2 > 0$ και $p_2 - p_1 > 0$

Για το $G(p_2)$ απο την προηγουμενη αναλυση

• Με $x > 1 \underset{\nearrow}{\overset{G}{\Leftrightarrow}} G(x) > G(1) \Leftrightarrow G(x) > 0$

και επειδη $p_2 > 1$ έχουμε $G(p_2) > 0$

Αρα $f(p_2) = \underbrace{p_2 G(p_2)}_{\oplus} + \underbrace{p_2 - p_1}_{\oplus} > 0$

Αρα απο Θεωρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$p_1 G(x) - p_1 - p_2 + 2x = 0 \Leftrightarrow$

$p_1 G(x) = p_1 + p_2 - 2x$

έχει τουλαχιστον μια ρίζα στο (p_1, p_2)

Τελος $f'(x) = \left(p_1 G(x) - p_1 - p_2 + 2x\right)'$

$= p_1 G'(x) + 2 > 0$ για καθε $x \in [p_1, p_2]$

άρα η ρίζα είναι μοναδικη.