

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 13 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2025

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

γ) Αν f, g είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B

αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

- δ) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$
- ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή, M , και μία ελάχιστη τιμή, m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

- B1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 7

- B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

- B3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$, έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \ln 2$$

Μονάδες 5

- B4.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \ln(x-1)$

- Γ1.** Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -x^2 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Μονάδες 5

Γ3. Ένα κινητό M ξεκινάει από το σημείο $B(2,0)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 2$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης x του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \ln(x-4) + 3$, $x > 4$.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο \mathbb{R}

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα x'

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{f(x)(x^2-1)}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε a , με $a > 1$, ισχύει:

$$1 < 2e^{a-1} - a^2 < 2(e^{a-1} - a)(a-1) + 1$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.



ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ