

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 25 ΙΟΥΛΙΟΥ 2024

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $n \in \mathbb{N}^*$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

ε) Ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{2 \cdot e^x - \beta}$, $\beta \leq 2$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B2. α) Να ορίσετε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x)$ ως προς τη μονοτονία

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B3. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της g

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B4. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = f(0) \cdot x + f(1) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
2024 -2025
www.ereuna.com.gr

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ2. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\ln(f(x))$ και $|f(x)|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ3. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g^2(x) - 4}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - |f(x)|}{\sqrt{f(x)} - 1 - 1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\kappa \cdot g(x) + \lambda \cdot f(x)}{x-1} = 2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(e^x) = x - 2 \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

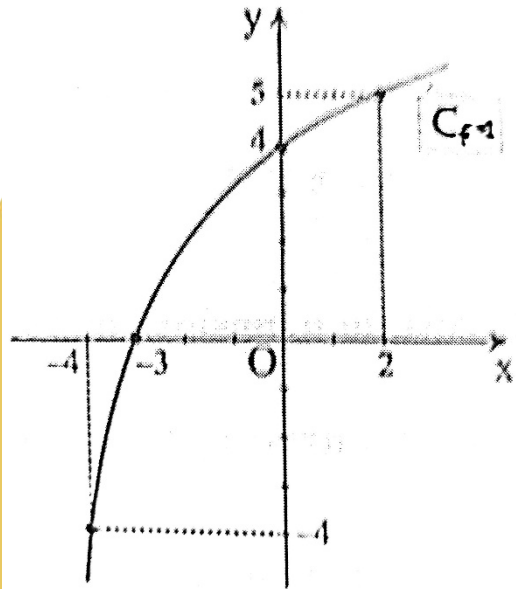
Δ1. Να δείξετε ότι $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$, $x > 0$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+2}}\right) = \frac{1}{2x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Έστω επιπλέον η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f^{-1}



Δ3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(5) + f^{-1}(-3) + f(4) + f^{-1}(-4)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ4. α) Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x) + 1) < 2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β) Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(3^x) + f^{-1}(5^x) > f^{-1}(4^x) + f^{-1}(6^x)$ για κάθε $x < 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5