

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 5

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη.

β. Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

γ. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τετμημένων της γραφικής παράστασης της f .

δ. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.

ε. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = ax^3 + 2ax - 3$, $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1.

B1. Να βρείτε τον αριθμό a .

Μονάδες 5

B2. Αν $a = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

B3. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x) + 3x^2 + 3) + 3 > 0$

Μονάδες 7

B4. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \ln x$, $x > 0$. Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + \kappa, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε:

α. το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής,

Μονάδες 5

β. για $\kappa = 12$ τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες 8

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right]$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln f(x)$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για τη οποία ισχύει:

$$f^2(x) + 6f(x) + 9\sin^2 x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 6

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}, & \text{αν } x > 0 \\ 4, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{\eta \mu 4x}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

α. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Μονάδες 6

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει:

$$xh(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 2h(x) - 3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $h(2)$

Μονάδες 6