

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15/10/2023

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε
ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

A2. Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f
παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.
- β)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- γ)** Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της είναι και γενησίως μονότονη.
- δ)** Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφή της f^{-1} ισχύουν οι σχέσεις: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in A$
- ε)** Έστω f, g, h τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η συνάρτηση $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \cdot \sin x$ και $g(x) = \beta \cdot x^3 - x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

για τις οποίες ισχύουν: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$ και $g''(2) = 24$

B1. Να δείξετε ότι: $\alpha = 4$ και $\beta = 2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B3. Αν $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, τότε:

i) Να υπολογίσετε την $h'(0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = \frac{e^\xi - \xi}{\xi - 1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x) = x + 2\eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ και να βρείτε τον τύπο της f

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε

τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ3. Να βρείτε το $f\left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi > \pi$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2024 \cdot (\xi - \pi) + 2023}{2023 \cdot (\xi - \pi) + 2024}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $f^2(x) + 12x = 9x^2 + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x^2 + x} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - f(x)}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$
- $h(x) = 2 \ln(x - 3) - 3$

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Αν $f(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Δ4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και h^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ f^{-1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(h(x) + h^{-1}(x)) \cdot \eta\mu \frac{1}{h(x) + h^{-1}(x)} \right]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
2023 -2024
www.ereuna.com.gr

