

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$, για τα x κοντά στο x_0 .

β. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

γ. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

δ. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$.

ε. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{3x^2 - 12}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x^2 - 5x| - |6 - 2x^2|}{-|x^2 - 5| + 1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 - 4| - |-x - 2|}{x^2 - 4}$

Μονάδες 15

B2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + \alpha x + \beta}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{4}{3}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και $x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \sigma\upsilon\nu 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Μονάδες 10

Γ2. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 + \lambda x + \lambda + 8} = -\infty$$

Μονάδες 5

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 g(x)] = 3$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) \cdot \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 \cdot f(x) \geq x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right]$

Μονάδες 12

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Μονάδες 9

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ