

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20/7/2023

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

A2. Πότε μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

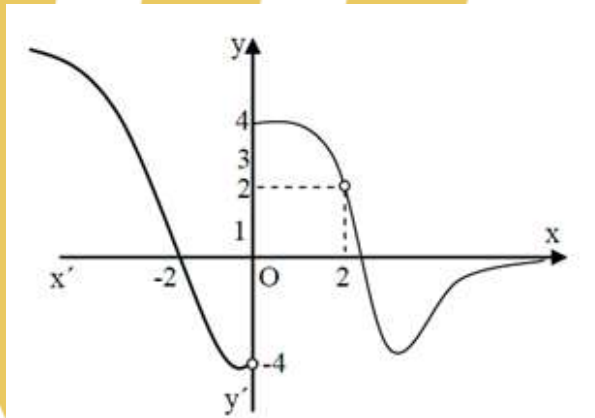
δ) Για $0 < \alpha < 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

ε) Ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B2. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots$

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots$

στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \dots$

ζ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} = \dots$

η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \dots$

θ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = \dots$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

B3. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ όπου $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5x}{3x + 4}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \eta\mu x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη

της f^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Αν, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε:

Γ3. Να βρείτε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Αν $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - 1 & , x < -1 \\ \beta x^2 + \beta & , x \geq -1 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ2. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2}{x + 1}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6