

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018
www.ereuna.com.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

A.2 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση είναι $1-1$ τότε είναι γνησίως μονότονη»

- α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.
- β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

ΜΟΝΑΔΕΣ (1+3)=4

A.3 Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018
www.ereuna.com.gr

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

β) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο \mathbb{R}

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y = x$ στο σημείο A τότε η γραφική παράσταση της αντίστροφης διέρχεται από το σημείο A .

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

ε) Αν μία συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάποιο $x_0 \in (a, \beta)$ ισχύει ότι $f''(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018
www.ereuna.com.gr

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 + \beta & , x \leq \alpha \\ 3x^3 + \alpha x - 4x + 1 & , x > \alpha \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B.1 Να εκφράσετε το β ως συνάρτηση του α ώστε η f να είναι συνεχής στο α .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B.2 Να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του β για την οποία η f είναι συνεχής.

Για ποια τιμή του α συμβαίνει το παραπάνω;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Για $\alpha = 2$ και $\beta = -3$

B.3 Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

B.4 Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Γ

Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{2} = 1 + x \cdot e^{2x-f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ.1 Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \ln[(x^2 + 1) \cdot e^{2x}]$, $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ.2 Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R}

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΡΕΥΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018
www.ereuna.com.gr

Γ.3 Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x^2-2} = \frac{1}{x^4-2x^2+2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ.4 Να δείξετε ότι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f παίρνει τιμές στο διάστημα $[1, 3]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{4 + f^2(x)} = f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ.1 α) Να δείξετε ότι $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ (2+3)=5

Δ.2 Αν F μία αρχική της f στο \mathbb{R} να δείξετε ότι $F(x+1) < \frac{F(x)+F(x+2)}{2}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ.3 Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ.4 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - 1}{f(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ.5 Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x} = ae^x + 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5