ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ερευνα
από το 1979

# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2016
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ 262

**Α2.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ 141

**Α3.** Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ 246

**Α1.** α) $\Lambda$ β) $\Sigma$ γ) $\Lambda$ δ) $\Sigma$ ε) $\Sigma$

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της $f$ είναι ο ακόλουθος:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | |
| f | | ↘ | min | ↗ | |

Συνεπώς η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $0$ το οποίο είναι το $f(0) = 0$

**Β2.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(2x)'\cdot(x^2+1)^2 - 2x\cdot(x^2+1)^2}{(x^2+1)^4} =$$

$$\frac{2\cdot(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2\cdot(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)\cdot[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot(2x^2+2-8x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)\cdot(2-6x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2+1)\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)}{(x^2+1)^4}$$

Οπότε από $f''(x) = 0$ έχουμε $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| f | | ∩ | Σ.Κ. | ∪ | Σ.Κ. | ∩ | |

Προκύπτει ότι η $f$ είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \quad \text{και} \quad [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$$

ενώ είναι κυρτή στο διάστημα $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

και έχει σημεία καμπής στα σημεία

$A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right))$ και $B(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right))$

δηλαδή στο $A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ και $B(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$

**Β3.** Η γραφική παράσταση της $f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Όμοια:

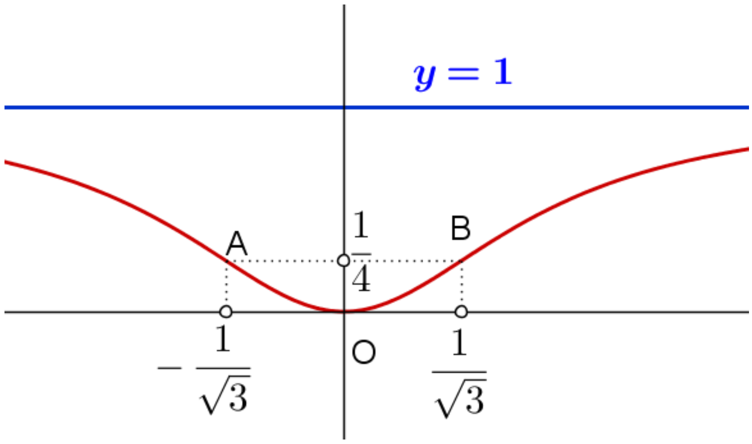
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Άρα η γραφική παράσταση της $f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$

**Β4.** Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και σκεφτόμενοι ότι

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$

Έχουμε την γραφική παράσταση της $f$



## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x \leq x-1 \quad \text{για κάθε} \quad x>0$$

Με την ισότητα να ισχύει για $x=1$

Αν θέσουμε όπου $x$ το $e^{x^2}$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\ln e^{x^2} \leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει για $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$

**Γ2.** Έχουμε:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$$

αφού $e^{x^2}-x^2-1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

Οπότε η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty\,,0)$ και $(0\,,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο κατά διαστήματα

Οπότε:

- Αν $x \in (-\infty,0)$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x \in (-\infty,0)$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$
- Αν $x \in (0,+\infty)$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x \in (0,+\infty)$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$

και επειδή όταν $x=0$ είναι $f(0)=0$ όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι:

$\alpha)\ \ f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad\ x \in \mathbb{R}$

$\beta)\ \ f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1) \quad\ x \in \mathbb{R}$

$$\gamma)\ \ f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & ,\ x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1) & ,\ x < 0 \end{cases}$$

$$\delta)\ \ f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & ,\ x < 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1) & ,\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Γ3.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$$

Όμως $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$ άρα το πρόσημο της $f'$ εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $2x$

Ακόμα Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 = 4x^2e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) \geq 0$$

Και επειδή η $f'$ είναι συνεχής στο $0$ η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

**Γ4.** Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το $0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x)$ , $x \in \mathbb{R}$

Οπότε:

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Διότι η $g$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $f'$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επίσης

$x+3>x \Leftrightarrow f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$

Άρα η $g$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Έχουμε:

$x>0 \Leftrightarrow |\eta\mu x|<x \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|)<g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Έχουμε:

$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'dx+\int_0^{\pi}(f'(x))'\cdot\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$-[\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)dx+[f'(x)\cdot\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\pi$

$f(\pi)+f(0)=\pi \quad (1)$

Επίσης έστω:

$$g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$$

Οπότε με $x$ κοντά στο μηδέν $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ και η $f$ συνεχής

στο $x_0=0$ ως παραγωγίσιμη οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}[\eta\mu x\cdot g(x)]=\eta\mu 0\cdot 1=0$$

Άρα $f(0)=0$

Συνεπώς η $(1)$ γίνεται $f(\pi)=\pi$

Ακόμα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot g(x)=1\cdot 1=1$$

Άρα $f'(0)=1$

**Δ2.**

$\boldsymbol{\alpha}$) Από την σχέση $e^{f(x)} + x = f\big(f(x)\big) + e^{x}$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) + e^{x} \quad (2)$

Έστω ότι η $f$ παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$

Τότε από θεώρημα $Fermat$ $f'(x_0) = 0 \quad (3)$

Από $(2)$ για $x = x_0$ έχουμε:

$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0$

Επομένως θα είναι $f'(0) = 0$ άτοπο διότι $f'(0) = 1$

Άρα η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

$\boldsymbol{\beta}$) Αφού η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ θα

είναι $f'(x) \neq 0$ , $x \in \mathbb{R}$

Όμως η $f'$ συνεχής αφού η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η $f$

είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$

**Δ3.** Επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $f(x) > 0$ κοντα στο $+\infty$

Όμως $-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2 \Rightarrow \frac{-2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$

και επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

**Δ4.** Έχουμε:

Θέτουμε $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ οπότε τα άρα της ολοκλήρωσης γίνονται: $x = 1 \Rightarrow u = 0$

$x = e^{\pi} \Rightarrow u = \pi$

Άρα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^{\pi} f(u)du$

Όμως $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow (\eta \ f \ \nearrow) \ f(0) \leq f(x) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \pi$

Με τις ισότητες να ισχύουν μόνο για $x = 0$ και $x = \pi$

Άρα $0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\pi} \pi dx \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2$