ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 150

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α4. $\alpha)$ Σωστό $\beta)$ Λάθος $\gamma)$ Σωστό $\delta)$ Σωστό $\varepsilon)$ Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$

Έχουμε: $f'(x) = 3\cdot\frac{x^2}{3} - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + 6 \Leftrightarrow$

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1 > 0$

Οπότε: $x_{1,2} = \frac{5\pm 1}{2}$ άρα $x_1 = 3$ και $x_2 = 2$

Το πρόσημο της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και στο $[3, +\infty)$ ενώ είναι γνήσια φθίνουσα στο $[2, 3]$.

Άρα η f για $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι

το $f(2) = \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 - 1$

$f(2) = \frac{11}{3}$

και η f για $x = 3$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι

το $f(3) = \frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 18 - 1$

$f(4) = \frac{7}{2}$

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$

με $\alpha = f'(0)$ αφού το σημείο επαφής είναι το σημείο $A(0, f(0))$

Άρα $\alpha = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 \Leftrightarrow \alpha = 6$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y = 6x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(0, f(0))$ με $f(0) = -1$ δηλαδη από το σημείο $A(0, -1)$ οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης.

Οπότε: $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $\boldsymbol{y = 6x - 1}$

Β3. Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}$

Έχουμε $x^2-5x-6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-6)$

$\Delta=25+24$

$\Delta=49>0$

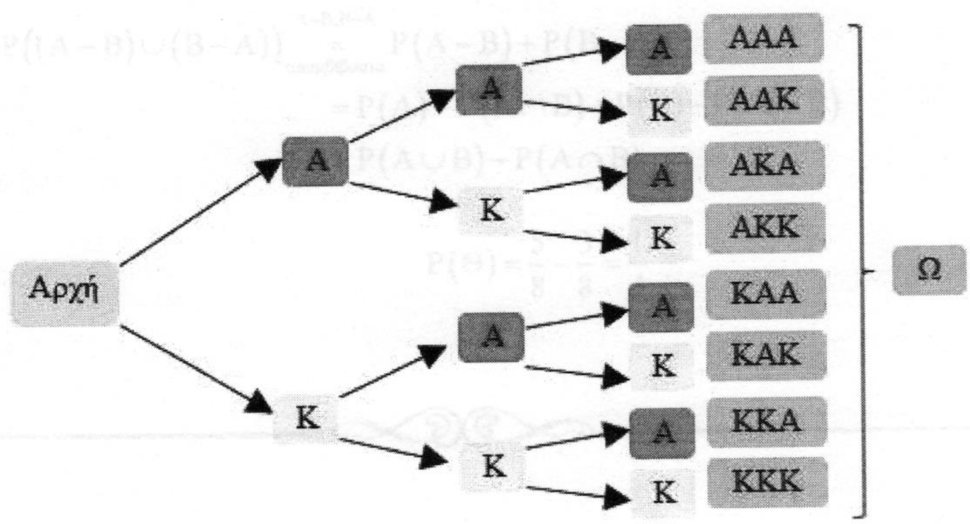
Οπότε: $x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{2}$ άρα $x_1=6$ και $x_2=-1$

Συνεπώς: $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

Άρα το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-6)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-6)=-7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το δενδροδιάγραμμα του πειράματος έχει ως εξής:



Άρα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega=\{AAA\,,AAK\,,AKA\,,AKK\,,KAA\,,KAK\,,KKA\,,KKK\}$

Γ2. Τα ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$A = \{KAA\,, KAK\,, KKA\,, KKK\}$

$B = \{AKK\,, KAK\,, KKA\,, KKK\}$

$\Gamma = \{AAA\,, AAK\,, KKA\,, KKK\}$

Γ3. $\boldsymbol{\alpha}$) Τα ενδεχόμενα Δ , E , Z με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$\Delta = A \cap B = \{KAK\,, KKA\,, KKK\}$

$E = A \cup B = \{AKK\,, KAA\,, KAK\,, KKA\,, KKK\}$

$Z = \Gamma - E = \{AAA\,, AAK\}$

Οπότε έχουμε: $N(\Delta) = 3$, $N(E) = 5$, $N(Z) = 2$, $N(\Omega) = 8$

Άρα από κλασικό ορισμό πιθανότητας έχουμε:

$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$ και $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{\beta}$) Το ενδεχόμενο H είναι το ενδεχόμενο $(A \cup B)'$

Επομένως $P(H) = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Το ενδεχόμενο Θ είναι το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$

Επομένως $P(\Theta) = P[(A - B) \cup (B - A)]$

$= P(A - B) + P(B - A)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$

$= \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης τότε έχουμε:

$Χρόνος$ $(σε\ λεπτά)$	$Κεντρική\ τιμή$ x_i
$[8\,,8+c)$	
$[8+c\,,8+2c)$	14

Οπότε έχουμε: $\frac{8+c+8+2c}{2}=14 \Leftrightarrow 16+3c=28 \Leftrightarrow 3c=12 \Leftrightarrow c=4$

Δ2. Ο πίνακας γίνεται:

$Χρόνος$ $(σε\ λεπτά)$	$Κεντρική\ τιμή$ x_i	$Συχνότητα$ ν_i
$[8\,,12)$	10	20
$[12\,,16)$	14	15
$[16\,,20)$	18	10
$[20\,,24)$	22	ν_4
$ΣΥΝΟΛΟ$	$-$	$45+\nu_4$

Όμως γνωρίζουμε ότι $\bar{x}=14 \Leftrightarrow \frac{10\cdot20+14\cdot15+18\cdot10+22\cdot\nu_4}{45+\nu_4}=14$

$$\Leftrightarrow \frac{590+22\cdot\nu_4}{45+\nu_4}=14$$

$$\Leftrightarrow (45+\nu_4)\cdot14=590+22\nu_4$$

$$\Leftrightarrow 630+14\nu_4 \cdot= 590+22\nu_4$$

$$\Leftrightarrow -8\cdot\nu_4=-40$$

$$\Leftrightarrow \nu_4=5$$

Άρα ο πίνακας γίνεται:

$Χρόνος$ $(σε\ λεπτά)$	$Κεντρική\ τιμή$ x_i	$Συχνότητα$ ν_i
$[8,12)$	10	20
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
$[20,24)$	22	5
$ΣΥΝΟΛΟ$	$-$	50

Δ3. Για να βρούμε πόσες παρατηρήσεις είναι τουλάχιστον 9 εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε πόσες παρατηρήσεις βρίσκονται στην κλάση $[9,12)$

$$\frac{12-8}{12-9} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow 4x = 60 \Leftrightarrow x = 15$$

και προσθέτουμε σε αυτές τις παρατηρήσεις των υπόλοιπων κλάσεων,

Άρα τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν:

$$15 + 15 + 10 + 5 = 45 \text{ υπολογιστές}$$

Δ4. Για την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων έχουμε:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5}{50}$$

$$= \frac{16 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50}$$

$$= \frac{800}{50} = 16$$

Άρα έχουμε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

Επομένως $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} \simeq 0{,}28$ ή $28\% < 10\%$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έχουμε:

Αν x_i το δείγμα των αρχικών χρόνων των υπολογιστών μετά την τοποθέτηση του καινούργιου επεξεργαστή δημιουργείται ένα νέο δείγμα y_i για τις παρατηρήσεις του οποίου ισχύει:

$$y_i = 0{,}8 \cdot x_i \quad , \quad i \in \{1\,,2\,,3\,,\ldots\,,50\}$$

Άρα ισχύει: $\bar{y} = 0{,}8 \cdot \bar{x}$

και $s_y = 0{,}8 \cdot s_x$

Άρα $CV_y = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{0{,}8 \cdot s_x}{0{,}8 \cdot \bar{x}} = \dfrac{s_x}{\bar{x}} = CV_x$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μεταβολής παραμένει αμετάβλητος.