ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 4

Α3.Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται $1-1$ συνάρτηση;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

(ii) Κάθε συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα όπου οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

(iii) Ισχύει $\left(x^{-v}\right)'=-vx^{v-1}$ για κάθε $v\in\mathbb{N}$

(iv) Κάθε συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη στο Α

(v) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|ημx|>|x|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2x+6}{x-2}, x\neq 2$ και $g(x)=1-\dfrac{2}{2e^x+1}, x\in\mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}

Μονάδες 5

Β3. Να ορίσετε τη παράσταση $f \circ f$

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < \beta$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $(x-2) \cdot f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάποια $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(f^2(2) - 25\right)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = 5$
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+3h) - 5}{h} = 6$

Γ1. Να βρείτε το $f(2)$ και το $f'(2)$

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$

Μονάδες 6

Γ3. Για $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$ να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται` στη γραφική παράσταση της g με

$$g(x) = \ln(x+1) + 2x - 1, x \in (-1, +\infty)$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x + 1 - e^{1-2x}$ με $x \in (-1, +\infty)$ τέμνει τον τη γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο του άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $g(A) = (0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν

- $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + \alpha$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και α κάποιος πραγματικός αριθμός
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$

Μονάδες 6

Για $\alpha = 1$

Δ2. να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντιστροφή της

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = e$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g^{-1} έχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Μονάδες 6